FRAÇÕES E EXPRESSÕES ARITMÉTICAS

$$\frac{0}{5} = 0$$

$$\frac{3}{4} > \frac{1}{4}$$

Hugo Luciano Dottori

HUGO LUCIANO DOTTORI

Orlando Alvarenga Gaudio
São Paulo - 1967

FRAÇÕES E EXPRESSÕES ARITMÉTICAS

GRÁFICA EDITÔRA HAMBURG
SÃO PAULO
1966

P R E F Á C I O

Esta apostila contém uma parte do programa do Curso de Admissão ao Ginásio. Foi nossa intenção apresentar essa parte da matéria dentro de uma sequência que possibilitasse ao aluno vencer as dificuldades uma por vez.

Também foi nossa preocupação empregar um vocabulário que tornasse a nossa obra accessível, principalmente, aos alunos, para que pudesse haver o máximo rendimento possível.

Entretanto, não a fizemos sòzinhos. Todos os ex-alunos do "Externato Sud Menucci" tiveram, talvez sem perceber, uma pequena participação.

À esta colaboração os sinceros agradecimentos do AUTOR.

São Paulo/Setembro/1966.

I N D I C E

Pág.

*

GRANDEZA

É tudo o que pode ser medido ou pesado. Assim, todos os objetos que nos rodeiam, bem como quase tudo que nós conhecemos pode ser considerado grandeza.

Exemplos: Uma quantia em dinheiro.
A distância entre duas cidades.

DIVISÃO DE UMA GRANDEZA EM PARTES IGUAIS; A IDÉIA DE METADE; TERÇA PARTE; QUARTA PARTE; ETC. RELAÇÕES ENTRE ESSAS IDÉIAS E AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

Todos nós temos uma noção intuitiva do que seja dividir uma grandeza em partes iguais. Se tivermos um punhado de balas e quizermos dividir por duas pessoas dando a metade para cada uma, mesmo sem conhecer nada de aritmética, nós saberíamos como fazer. Entretanto, queremos chamar a atenção do leitor para o fato de que existe uma estreita relação entre essa nossa noção intuitiva e as operações aritméticas.

Assim se tivermos uma grandeza qualquer e quizermos saber qual é a metade dessa grandeza, devemos dividi-la por 2.

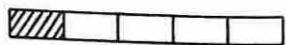
Por exemplo, a metade de Cr$ 120 é Cr$ 120 divididos por 2, o que dá Cr$ 60. Da mesma forma a terça parte de uma grandeza é esta grandeza dividida por 3,

a quarta parte por 4, etc.

Exemplificando teríamos:

A terça parte de 12 m é 4 m.
A sétima parte de ₢$ 140 é ₢$ 20.

Poderíamos também para exemplificar melhor, dividir uma figura qualquer em partes iguais. Seja, por exemplo, um retângulo. Se dividirmos êsse retângulo em cinco partes iguais temos:

Onde a parte assinalada corresponde à quinta parte do retângulo. Devemos também ter em mente que se a quinta parte de uma quantia em dinheiro é ₢$ 30, três quintas partes serão ₢$ 30 vêzes três o que dá ₢$ 90.

EXERCÍCIOS

1) Que distância corresponde à metade de 18km?

2) Com a quinta parte de ₢$ 2 000 comprei 2 cadernos. Quanto custou cada caderno?

3) Um reservatório com capacidade para 3 000 l está cheio até a sexta parte. Quantos litros faltam para enchê-lo?

4) A décima parte de uma quantia é ₢$ 50. Que quantia corresponde a três décimas partes dessa quantia?

5) Uma caixa pesa 24 kg. Quantos kg pesarão 5 sextas partes dessa caixa?

6) Dado um retântulo assinalar 4 quintas partes dêsse retângulo.

RESPOSTAS: 1) 9 km 2) ₢$ 200 3) 2 500 l
4) ₢$ 150 5) 20 kg

O que foi exposto até aqui veio reforçar a nossa noção intuitiva de divisão de grandezas em partes iguais e chamar a nossa atenção para as relações existentes entre idéias que já tínhamos e as operações aritméticas. Nosso principal objetivo, entretanto, é dizer que podemos associar números a essa idéias.

Ao invés de falarmos metade podemos falar $\frac{1}{2}$ (lê-se um meio).

Ao invés de falarmos terça parte podemos falar $\frac{1}{3}$ (lê-se um têrço).

Ao invés de falarmos quarta parte podemos falar $\frac{1}{4}$ (lê-se um quarto).

Ao invés de falarmos quinta parte podemos falar $\frac{1}{5}$ (lê-se um quinto).

E assim por diante.

Êsses números que estão associados a partes de grandezas chamam-se frações ou números fracionários.

A maneira de representar as frações é a vista acima, ou seja, colocamos um traço (que chamamos traço

de fração) com um número acima dêle e outro abaixo dêle. O número que fica acima do traço chama-se numerador e o que fica abaixo do traço chama-se denominador.

Seja, por exemplo, a fração $\frac{2}{3}$.

Temos:

$\frac{2}{3}$ — 2: numerador; traço: traço de fração; 3: denominador

NOMENCLATURA DAS FRAÇÕES

A nomenclatura das frações foi iniciada acima. Foi visto até a fração $\frac{1}{5}$. Daí para a frente temos:

$\frac{1}{6}$ lê-se um sexto

$\frac{1}{7}$ lê-se um sétimo

$\frac{1}{8}$ lê-se um oitavo

$\frac{1}{9}$ lê-se um nono

$\frac{1}{10}$ lê-se um décimo

$\frac{1}{11}$ lê-se um onze avos

Daí para a frente lê-se como foi visto no último exemplo, ou seja, o cardinal correspondente ao denominador acompanhado da palavra avos.

$\frac{1}{12}$ lê-se um doze avos

$\frac{1}{13}$ lê-se um treze avos

Exceção feita aos denominadores que são potências de 10 (100; 1 000; 10 000; etc.):

$\frac{1}{100}$ lê-se um centésimo

$\frac{1}{1000}$ lê-se um milésimo

$\frac{1}{10000}$ lê-se um décimo de milésimo

SIGNIFICADO DAS FRAÇÕES

Uma fração representa sempre alguma coisa que foi dividida em partes iguais e da qual alguma parte foi considerada. Essa alguma coisa que foi dividida em partes iguais chamamos de todo ou inteiro. Se quizermos representar uma fração por uma figura qualquer, essa figura na qual a fração foi representada é o que chamamos de inteiro. O denominador de uma fração indica em quantas partes o inteiro foi dividido e o numerador indica o número de partes consideradas.

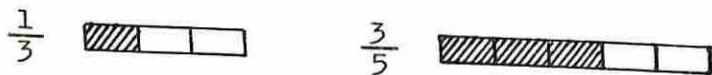
Seja um ano, que é igual a doze meses. Se quizermos representar 7 meses do ano, em fração temos:

$\frac{7}{12}$, onde o denominador (12) indica o número de meses em que o ano é dividido e o numerador (7) indica o número de meses considerados.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS FRAÇÕES

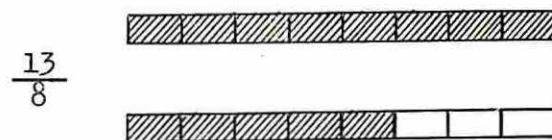
De um modo geral podemos representar uma fração com um desenho qualquer, de preferência com uma fôrma geométrica definida (retângulo, círculo, quadrado, etc.).

Se o inteiro fôr representado por um retângulo podemos representar $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{5}$ das seguintes formas:

$\frac{1}{3}$ $\frac{3}{5}$

Se o inteiro fôr representado por um círculo teremos:

Se o inteiro fôr representado por um quadrado podemos representar:

$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$

Seja agora representar a fração $\frac{13}{8}$. Se tomarmos um único inteiro podemos representar no máximo $\frac{8}{8}$. É preciso então que tomemos 2 inteiros para representar a fração $\frac{13}{8}$. Se representarmos o inteiro por um retângulo teremos:

EXERCÍCIOS

1) Em minha classe somos em 50 alunos. Que fração da classe eu represento?

2) Que fração do dia (24 horas) representam 11 horas?

3) Que fração da hora (60 minutos) representam 37 minutos?

4) Que fração do minuto (60 segundos) representam 43 segundos?

5) Que fração do ano (12 meses) representam 13 meses?

6) Que fração da hora (60 minutos) representam 73 minutos?

7) Representando o inteiro por um retângulo representar gràficamente as seguintes frações:

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{11}{4}$ d) $\frac{9}{5}$

8) Representando o inteiro por um círculo, representar gràficamente as seguintes frações:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{13}{4}$

RESPOSTAS: 1) $\frac{1}{50}$ 2) $\frac{11}{24}$ 3) $\frac{37}{60}$ 4) $\frac{43}{60}$

5) $\frac{13}{12}$ 6) $\frac{73}{60}$

OS SÍMBOLOS " = ", " $>$ ", " $<$ "

Quando queremos dizer que duas grandezas são iguais utilizamos o símbolo " = ".

Exemplo: 1 m = 100 cm

Se quizermos dizer maior ou menor que, devemos utilizar os símbolos $>$ ou $<$

O símbolo $>$ lê-se maior que.

Exemplo: $9 > 7$

O símbolo $<$ lê-se menor que.

Exemplo: $4 < 9$

EXERCÍCIOS

1) Colocar convenientemente os símbolos $>$ ou $<$:

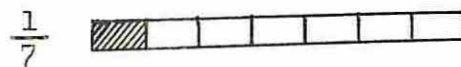
a)	14	15	e)	18	17
b)	34	56	f)	27	30
c)	23	17	g)	33	34
d)	65	66	h)	22	20

RESPOSTAS: a) $<$ b) $<$ c) $>$ d) $<$ e) $>$ f) $>$ g) $<$ h) $>$

COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

Suponhamos que dadas duas frações queiramos saber qual das duas é maior. Seja, por exemplo, comparar $\frac{1}{7}$ e $\frac{5}{7}$. Para melhor visualização e consequente melhor aprendizado vamos recorrer às representações gráficas das frações a serem comparadas. Representemos o inteiro por um retângulo. Teremos então:

$\frac{1}{7}$

$\frac{5}{7}$

Torna-se agora fácil ver que $\frac{5}{7}$ é maior que $\frac{1}{7}$. Escreve-se $\frac{5}{7} > \frac{1}{7}$.

Seja agora comparar $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$. Utilizando-se o mesmo processo, teremos:

$\frac{2}{5}$

$\frac{4}{5}$

E concluímos: $\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$

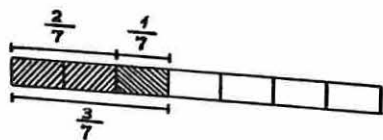
Podemos então enunciar a regra: Quando duas ou mais frações são homogêneas (frações homogêneas são as que têm o mesmo denominador) a maior é a que tem maior numerador.

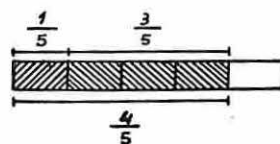
OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

a) ADIÇÃO

A idéia de adição está associada à idéia de juntar coisas. Seja adicionar $\frac{2}{7}$ a $\frac{1}{7}$. Façamos suas representações gráficas num mesmo inteiro.

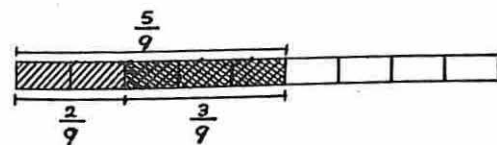
$\frac{2}{7}$ $\frac{1}{7}$

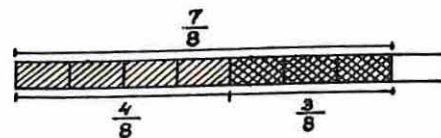
$\frac{3}{7}$

Se juntarmos $\frac{2}{7}$ a $\frac{1}{7}$ teremos tôda a parte assinalada da figura, ou seja $\frac{3}{7}$.

Seja agora adicionar $\frac{1}{5}$ a $\frac{3}{5}$. Utilizando-se o mesmo processo temos:

Donde concluímos que $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ valem $\frac{4}{5}$.

Podemos então enunciar a regra: Para somar duas frações homogêneas conserva-se o denominador e soma-se os numeradores.

b) SUBTRAÇÃO

A idéia de subtrair está associada à idéia de retirar. Se tivermos uma grandeza qualquer, subtrair coisas desta grandeza significa retirar coisas desta grandeza. Seja subtrair $\frac{3}{9}$ de $\frac{5}{9}$. Façamos suas representações gráficas num mesmo inteiro:

Torna-se agora fácil ver que $\frac{5}{9} - \frac{3}{9}$ valem $\frac{2}{9}$.

Façamos agora $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$. Utilizando-se o mesmo processo temos:

Donde concluímos que $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$ valem $\frac{4}{8}$.

Podemos então enunciar a regra: Para se subtrair frações homogêneas conserva-se o denominador e subtrai-se os numeradores.

EXERCÍCIOS

$\frac{4}{9}$;

$\frac{5}{7}$;

1) Qual das duas frações é maior: a) $\frac{7}{9}$ ou
b) $\frac{3}{7}$ ou $\frac{5}{7}$?
2) Qual das duas frações é menor: a) $\frac{2}{7}$ ou
b) $\frac{4}{9}$ ou $\frac{2}{9}$?
3) Efetuar as operações:

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} =$
b) $\frac{4}{7} + \frac{5}{7} =$
c) $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{7}{9} =$
d) $\frac{3}{11} + \frac{5}{11} + \frac{7}{11} =$
e) $\frac{6}{7} - \frac{5}{7} =$
f) $\frac{13}{19} - \frac{10}{19} =$
g) $\frac{9}{13} - \frac{8}{13} =$
h) $\frac{1}{19} + \frac{3}{19} + \frac{7}{19} =$

RESPOSTAS: 1) a) $\frac{7}{9} > \frac{4}{9}$ b) $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$
2) a) $\frac{2}{7} < \frac{5}{7}$ b) $\frac{2}{9} < \frac{4}{9}$
3) a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{9}{7}$ c) $\frac{12}{9}$ d) $\frac{15}{11}$
e) $\frac{1}{7}$ f) $\frac{3}{19}$ g) $\frac{1}{13}$ h) $\frac{11}{19}$

ORDEM CRESCENTE E DECRESCENTE

A idéia de ordem também é intuitiva para nós. Em quase tôdas as nossas atividades existe a preocupação de obedecer determinadas ordens que nos facilitem a boa execução destas atividades. Em aritmética a noção de ordem crescente e decrescente também pode ser desenvolvida com o auxílio dos nossos conhecimentos intuitivos. A palavra crescente quer dizer "que cresce", ou seja vai do menor ao maior.

Seja colocar em ordem de grandeza crescente os números 61; 45 e 76. Como a ordem é crescente devemos ir escrevendo os números do menor para os maiores. A ordem crescente será então: $45 < 61 < 76$.

A ordem decrescente é exatamente o contrário. Temos que iniciar pelos números maiores para depois ir escrevendo os menores. Se colocarmos em ordem de grandeza decrescente os números 13; 34 e 11, teremos: $34 > 13 > 11$.

Agora que temos uma idéia do que seja ordem crescente e decrescente podemos colocar não sòmente números inteiros nestas ordens, mas também frações. Basta que façamos para as frações o mesmo que fizemos para os números inteiros que vimos como exemplo.

Ordem crescente: Começa-se pela menor fração e vai-se escrevendo as maiores.

Ordem decrescente: Começa-se pela maior fração e vai-se escrevendo as menores.

Seja colocar em ordem de grandeza crescente as frações: $\frac{3}{7}$; $\frac{1}{7}$ e $\frac{5}{7}$.

Iniciando pela menor e indo escrevendo as maiores, temos: $\frac{1}{7} < \frac{3}{7} < \frac{5}{7}$.

Seja colocar em ordem de grandeza decrescente as frações: $\frac{3}{8}$; $\frac{6}{8}$ e $\frac{5}{8}$.

Iniciando pela maior e indo escrevendo as menores, temos: $\frac{6}{8} > \frac{5}{8} > \frac{3}{8}$.

EXERCÍCIOS

1) Qual das duas frações é maior: $\frac{3}{11}$ ou $\frac{5}{11}$?

2) Qual das duas frações é menor: $\frac{13}{19}$ ou $\frac{9}{19}$?

3) Colocar em ordem de grandeza crescente os números: 65; 56 e 78.

4) Colocar em ordem de grandeza decrescente os números: 27; 19 e 53.

5) Colocar em ordem de grandeza decrescente as frações: $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{5}$.

6) Colocar em ordem de grandeza crescente as frações: $\frac{11}{37}$; $\frac{23}{37}$ e $\frac{3}{37}$.

7) Colocar em ordem de grandeza decrescente as frações: $\frac{9}{13}$; $\frac{7}{13}$ e $\frac{11}{13}$.

8) Colocar em ordem de grandeza crescente as frações: $\frac{17}{41}$; $\frac{13}{41}$ e $\frac{8}{41}$.

9) Efetuar as operações:

a) $\frac{8}{17} + \frac{2}{17} + \frac{1}{17} =$

b) $\frac{13}{19} + \frac{9}{19} + \frac{11}{19} =$

c) $\frac{1}{37} + \frac{12}{37} + \frac{9}{37} + \frac{19}{37} =$

d) $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} =$

e) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} =$

f) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} =$

RESPOSTAS:

1) $\frac{5}{11} > \frac{3}{11}$

2) $\frac{9}{19} < \frac{13}{19}$

3) $56 < 65 < 78$

4) $53 > 27 > 19$

5) $\frac{4}{5} > \frac{3}{5} > \frac{1}{5}$

6) $\frac{3}{37} < \frac{11}{37} < \frac{23}{37}$

7) $\frac{11}{13} > \frac{9}{13} > \frac{7}{13}$

8) $\frac{8}{41} < \frac{13}{41} < \frac{17}{41}$

9) a) $\frac{11}{17}$ b) $\frac{33}{19}$ c) $\frac{41}{37}$

d) $\frac{10}{5}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{2}{5}$.

FRAÇÕES PRÓPRIAS E IMPRÓPRIAS. SIGNIFICADO ARITMÉTICO DAS FRAÇÕES. FRAÇÕES APARENTES. NÚMEROS MISTOS.

DEFINIÇÕES

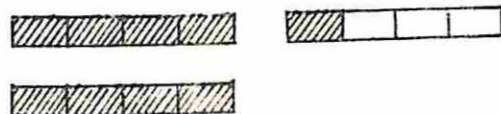
1) Fração própria é aquela em que o numerador é menor que o denominador. Exemplos: $\frac{3}{7}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{9}$.

2) Fração imprópria é aquela em que o numerador é maior que o denominador. Exemplos: $\frac{8}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{8}{7}$.

Quando representamos uma fração estamos também representando uma operação aritmética. Quando colocamos o numerador sôbre o denominador queremos dizer que o numerador vai ser dividido pelo denominador. Assim quando escrevemos $\frac{2}{5}$, estamos também dizendo 2 dividido por 5.

3) Fração aparente é aquela em que o numerador é divisível pelo denominador. Exemplos: $\frac{14}{7}$; $\frac{16}{4}$ e $\frac{8}{8}$.

As frações aparentes, como o próprio nome diz, são aparentemente frações, mas se dividirmos o numerador pelo denominador obteremos números inteiros.

Seja agora a fração imprópria $\frac{9}{4}$. Se quizermos representar gràficamente essa fração, utilizando um retângulo para representar o inteiro teremos:

O leitor notou que para representar $\frac{9}{4}$ tivemos que tomar 2 inteiros e $\frac{1}{4}$. Podemos então escrever $\frac{9}{4}$ sob a forma $2\frac{1}{4}$. Essa outra maneira de representar as frações impróprias é o que chamamos de número misto.

No número misto $2\frac{1}{4}$ chamamos:

2 parte inteira
$\frac{1}{4}$ parte fracionária

Quando o numerador de uma fração é zero, a fração é igual a zero. Ex.: $\frac{0}{4} = 0$; $\frac{0}{7} = 0$

Não existe fração cujo denominador seja zero.

Entretanto, não é necessário recorrer a representações gráficas tôdas as vêzes que quizermos saber como se representa uma fração imprópria em número misto. Podemos recorrer à seguinte regra:

Divide-se o numerador pelo denominador.

a) O cociente da divisão será a parte inteira do número misto.

b) O resto da divisão será o numerador da parte fracionária do número misto.

c) O denominador da fração imprópria será o

denominador da mesma parte fracionária.

Seja representar a fração imprópria $\frac{23}{4}$ em número misto:

$$23 \,\underline{|\; 4} \quad 3 \quad 5 \qquad \frac{23}{4} = 5\,\frac{3}{4}$$

A transformação de fração imprópria em número misto também é chamada extração de inteiros.

O problema inverso, ou seja, representar um número misto sob a forma de fração imprópria é resolvida da seguinte maneira:

O denominador da parte fracionária do número misto é o mesmo que o da fração imprópria.

O numerador da fração imprópria é obtido da seguinte maneira:

a) Multiplica-se a parte inteira do número misto pelo denominador da parte fracionária do mesmo.

b) Soma-se o resultado obtido ao numerador da parte fracionária do número misto.

Seja representar em fração imprópria o número misto $3\,\frac{2}{5}$.

$$3\,\frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

É preciso ter em mente que sempre que tivermos uma comparação de frações ou uma operação qualquer

em que apareçam números mistos, a primeira coisa que se faz é transformar êsses números mistos em frações impróprias.

Seja por exemplo efetuar: $2\,\frac{1}{4} - 1\,\frac{3}{4}$. Sabemos que:

$$2\,\frac{1}{4} = \frac{2 \times 4 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$1\,\frac{3}{4} = \frac{1 \times 4 + 3}{4} = \frac{7}{4}$$

Temos então: $2\,\frac{1}{4} - 1\,\frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{7}{4} = \frac{2}{4}$

EXERCÍCIOS

1) Representar sob a forma de número misto as seguintes frações impróprias:

a) $\frac{17}{5}$ b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{18}{7}$ d) $\frac{19}{4}$

2) Representar sob a forma de fração imprópria os seguintes números mistos:

a) $2\,\frac{3}{4}$ b) $1\,\frac{5}{7}$ c) $8\,\frac{1}{9}$ d) $4\,\frac{1}{3}$

3) Das frações seguintes sublinhar as próprias: $\frac{11}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{16}{15}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$

4) Das frações seguintes sublinhar as impróprias: $\frac{16}{13}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{15}{14}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{11}$.

5) Efetuar as operações (extrair, sempre que fôr possível, os inteiros do resultado):

a) $2\frac{3}{7} + 1\frac{2}{7} + 4\frac{5}{7} =$

b) $1\frac{3}{9} + 5\frac{4}{9} + 7\frac{8}{9} =$

c) $\frac{11}{17} + 2\frac{3}{17} + 1\frac{1}{17} =$

d) $3\frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} =$

e) $2\frac{3}{7} - \frac{6}{7} =$

f) $3\frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$

RESPOSTAS: 1) a) $3\frac{2}{5}$ b) $1\frac{1}{5}$ c) $2\frac{4}{7}$ d) $4\frac{3}{4}$

2) a) $\frac{11}{4}$ b) $\frac{12}{7}$ c) $\frac{73}{9}$ d) $\frac{13}{4}$

3) $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$

4) $\frac{16}{13}$; $\frac{15}{14}$; $\frac{7}{4}$

5) a) $8\frac{3}{7}$ b) $14\frac{6}{9}$ c) $3\frac{15}{17}$

d) $4\frac{4}{5}$ e) $1\frac{4}{7}$ f) $2\frac{2}{4}$

GRANDEZAS EQUIVALENTES

Existem grandezas que podem ser expressas por números diferentes e no entanto representam a mesma coisa. Assim se tivermos 1 dúzia de laranjas, tanto faz que digamos 1 dúzia de laranjas ou 12 laranjas, pois 12 e 1 dúzia são a mesma coisa. Se fizéssemos outros exemplos veríamos que coisas aparentemente diferentes são às vêzes iguais. O mesmo que aconteceu com o exemplo acima pode acontecer com as frações. Façamos uma verificação.

Pegue uma fôlha de papel e dobre-a ao meio. Cada uma das partes obtidas corresponde à metade, ou seja $\frac{1}{2}$ da fôlha. Dobre agora a mesma fôlha de papel em quatro partes iguais. Cada parte obtida agora corresponde a $\frac{1}{4}$ da fôlha.

Responda: O que é maior: $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$?

Comparando-se as representações gráficas (na fôlha de papel) de $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ verificamos que estas frações são iguais (dizemos também que são equivalentes).

Poderíamos também dividir uma outra fôlha de papel ao meio para depois dividi-la em 8 partes iguais.

Verificaríamos que $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ também são equivalentes.

Concluímos então que:

$\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são equivalentes

$\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ são equivalentes

Mostramos em parágrafos anteriores que se um número misto e uma fração imprópria são equivalentes existe uma regra que nos permite obter a fração imprópria a partir do número misto ou o número misto a partir da fração imprópria.

Surgiu, entretanto, um nôvo problema. Vimos que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são equivalentes. Pergunta-se agora como fazer para partindo de $\frac{1}{2}$ obter $\frac{2}{4}$.

Basta que se multiplique o numerador e o denominador de $\frac{1}{2}$ por 2. Temos então:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

Foi também conclusão nossa que $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ são equivalentes. Se tivermos $\frac{1}{2}$ e quizermos obter $\frac{4}{8}$ devemos fazer:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$$

Se quizermos obter $\frac{1}{2}$ a partir de $\frac{4}{8}$ temos

que dividir o numerador e o denominador de $\frac{4}{8}$ por 4. Teremos então:

$$\frac{4}{8} = \frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2}$$

Podemos agora enunciar a propriedade fundamental das frações: Multiplicando-se ou dividindo-se os dois têrmos (numerador e denominador) de uma fração, por um mesmo número (diferente de zero) o valor da fração não se altera.

Seja obter frações equivalentes a $\frac{4}{6}$.

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \times 4}{6 \times 4} = \frac{16}{24}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$$

EXERCÍCIO

Obter duas frações equivalentes a cada uma das frações abaixo:

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{15}{20}$ c) $\frac{6}{10}$ d) $\frac{6}{7}$

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

Simplificar uma fração é dividir o numerador e o denominador desta fração por um mesmo número, para se obter uma fração equivalente a ela, cujos têrmos sejam números menores que os iniciais.

Seja simplificar a fração $\frac{6}{8}$. Podemos dividir o numerador e o denominador desta fração por 2. Teremos então:

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

É oportuno lembrar que não existe um critério único para simplificar frações. Seja, por exemplo, simplificar a fração $\frac{12}{18}$.

Podemos fazer:

$$\frac{12}{18} = \frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}$$

Ou ainda:

$$\frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$$

Esta simplificação é chamada simplificação pelo cancelamento.

Apesar de não haver uma única maneira de se efetuar a simplificação de frações, de qualquer maneira que isto seja feito, o resultado final é sempre o mesmo. Devemos ir simplificando a fração até que não seja mais possível fazê-lo. A fração obtida no fim da simplificação chama-se irredutível.

Fração irredutível é aquela que não pode mais ser simplificada.

Se quizermos, entretanto, fazer sempre uma única divisão basta que se determine o maior divisor comum do numerador e denominador da fração e depois dividir os dois têrmos da fração pelo maior divisor obtido.

Seja simplificar $\frac{10}{40}$. Sabemos que o m.d.c. (10 ; 40) = 10.

Temos então:

$$\frac{10}{40} = \frac{10 \div 10}{40 \div 10} = \frac{1}{4}$$

Esta simplificação é chamada simplificação pelo m.d.c.

EXERCÍCIO

Simplificar as frações:

a) $\frac{12}{15}$ b) $\frac{18}{20}$ c) $\frac{14}{21}$ d) $\frac{18}{24}$ e) $\frac{18}{27}$

f) $\frac{25}{30}$ g) $\frac{4}{10}$ h) $\frac{12}{24}$

RESPOSTAS: a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{3}$

f) $\frac{5}{6}$ g) $\frac{2}{5}$ h) $\frac{1}{2}$

OBTENÇÃO DE FRAÇÕES EQUIVALENTES A FRAÇÕES IRREDUTÍVEIS

Se uma fração pode ser simplificada, a obtenção de frações equivalentes a ela pode ser feita da maneira que quizermos, ou seja, multiplicando-se ou dividindo-se seus dois têrmos por um mesmo número. Seja, por exemplo, a fração $\frac{6}{14}$. Se quizermos obter frações equivalentes a ela podemos fazer:

$$\frac{6}{14} = \frac{6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{6}{14} = \frac{6 \times 3}{14 \times 3} = \frac{18}{42}$$

Se, entretanto, quizermos obter frações equivalentes a frações irredutíveis a única maneira de fazer isto é multiplicando os dois têrmos da fração por um mesmo número.

Seja obter frações equivalentes à fração irredutível $\frac{2}{5}$.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 5}{5 \times 5} = \frac{10}{25}$$

Poderemos também obter frações equivalentes a frações irredutíveis dadas, com denominadores determinados.

Seja obter uma fração equivalente à fração irredutível $\frac{2}{3}$ de denominador 15. Temos que multiplicar o denominador de $\frac{2}{3}$ por um número, tal que o resultado seja 15. Êsse número é 5.

$$\frac{2}{3} = \frac{\quad}{3 \times 5} = \frac{\quad}{15}$$

Resta-nos saber agora qual será o numerador da nova fração. Para que a nova fração seja equivalente à primeira é necessário que o número pelo qual o denominador foi multiplicado seja também o número pelo qual temos que multiplicar o numerador. Como o denominador foi multiplicado por 5, o numerador também tem que ser multiplicado por 5. Teremos então:

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$, o que nos dá a solução

donproblema, ou seja, a fração equivalente a $\frac{2}{3}$ de denominador 15 é a fração $\frac{10}{15}$.

Não se pode todavia fazer com que uma fração irredutível tenha qualquer denominador. Seja, por exemplo, a fração irredutível $\frac{2}{5}$. Podemos obter uma fração equivalente à fração irredutível $\frac{2}{5}$ de denominador 10. Teremos então:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$$

De denominador 15: $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$

Entretanto, o leitor não saberia como fazer para obter uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ de denominador 17 ou de denominador 21. Isto acontece, porque 10 e 15 são múltiplos de 5, enquanto que 17 e 21 não são. Podemos então dizer que os denominadores das novas frações têm que ser múltiplos dos denominadores das frações iniciais.

Se tivermos que obter frações equivalentes a frações que possam ser simplificadas, devemos antes de tudo simplificá-las. Seja obter a fração equivalente a $\frac{10}{12}$ de denominador 18.

$$\frac{10}{12} = \frac{10 \div 2}{12 \div 2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$$

E poderemos dizer que a fração equivalente a $\frac{10}{12}$ de denominador 18 é a fração $\frac{15}{18}$.

EXERCÍCIOS

1) Qual é a fração equivalente a $\frac{6}{7}$ de denominador 14?

2) Qual é a fração equivalente a $\frac{5}{6}$ de denominador 30?

3) Qual é a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ de denominador 16?

4) Qual é a fração equivalente a $\frac{4}{5}$ de denominador 30?

5) Qual é a fração equivalente a $\frac{3}{8}$ de denominador 24?

6) Qual é a fração equivalente a $\frac{10}{15}$ de denominador 9?

7) Qual é a fração equivalente a $\frac{6}{8}$ de denominador 12?

8) Qual é a fração equivalente a $\frac{5}{10}$ de denominador 4?

RESPOSTAS: 1) $\frac{12}{14}$ 2) $\frac{25}{30}$ 3) $\frac{8}{16}$ 4) $\frac{24}{30}$ 5) $\frac{9}{24}$

6) $\frac{6}{9}$ 7) $\frac{9}{12}$ 8) $\frac{2}{4}$

Poderíamos também obter frações equivalentes a frações dadas, com numeradores determinados. Seja obter a fração equivalente a $\frac{2}{3}$ de numerador 8. Teremos então:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$$

A fração equivalente a $\frac{2}{3}$ de numerador 8 é a fração $\frac{8}{12}$.

EXERCÍCIOS

1) Qual é a fração equivalente a $\frac{5}{6}$ de numerador 15?

2) Qual é a fração equivalente a $\frac{3}{4}$ de numerador 12?

3) Qual é a fração equivalente a $\frac{2}{3}$ de numerador 10?

4) Qual é a fração equivalente a $\frac{7}{8}$ de numerador 28?

5) Qual é a fração equivalente a $\frac{10}{12}$ de numerador 15?

6) Qual é a fração equivalente a $\frac{4}{8}$ de numerador 3?

RESPOSTAS: 1) $\frac{15}{18}$ 2) $\frac{12}{16}$ 3) $\frac{10}{15}$ 4) $\frac{28}{32}$ 5) $\frac{15}{18}$

6) $\frac{3}{6}$

REDUÇÃO DE FRAÇÕES IRREDUTÍVEIS AO MESMO DENOMINADOR

Seja, por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$.

Vamos obter a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ de denominador 12:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{6}{12}$$

Seja agora a fração $\frac{3}{4}$.

Vamos obter a fração equivalente a $\frac{3}{4}$ de denominador 12:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

Obtivemos então as frações $\frac{6}{12}$ e $\frac{9}{12}$ a partir das frações irredutíveis $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$. Nota-se que as frações obtidas a partir de $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ têm o mesmo denominador.

A operação desenvolvida nas linhas acima chama-se redução de frações ao mesmo denominador. De fato o leitor observa que partimos de duas frações que tinham denominadores diferentes e obtivemos frações equivalentes a elas que tinham o mesmo denominador.

Entretanto, 12 não é o único número que nos permite obter uma solução para o problema. O leitor pode verificar que os números 8; 16; 20; também podem ser denominadores das novas frações.

Seja obter frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ de denominador 8.

Temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$$

Pode agora o leitor verificar que os números 10; 14; 18 não nos permitem obter uma solução para o problema. Não podemos obter frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ cujos denominadores sejam os números citados acima. Isto se deve ao fato de que êsses números não são múltiplos comuns de 2 e 4.

Podemos então dizer que quando queremos reduzir frações irredutíveis ao mesmo denominador temos que escolher para denominador das novas frações um número que seja múltiplo comum dos denominadores iniciais.

EXERCÍCIOS

1) Obter as frações equivalentes a $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{2}$ de denominador 12.

2) Obter as frações equivalentes a $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$ e $\frac{7}{10}$ de denominador 20.

3) Obter as frações equivalentes a $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$ de denominador 24.

4) Obter as frações equivalentes a $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{20}$ e $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{8}$ de denominador 40.

5) Obter as frações equivalentes a $\frac{6}{10}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ de denominador 15.

6) Obter as frações equivalentes a $\frac{4}{8}$; $\frac{2}{3}$ e $\frac{15}{18}$ de denominador 12.

RESPOSTAS:
1) $\frac{9}{12}$; $\frac{10}{12}$ e $\frac{6}{12}$ 2) $\frac{4}{20}$; $\frac{10}{20}$ e $\frac{14}{20}$
3) $\frac{20}{24}$; $\frac{18}{24}$ e $\frac{21}{24}$ 4) $\frac{12}{40}$; $\frac{14}{40}$; $\frac{32}{40}$ e $\frac{15}{40}$
5) $\frac{9}{15}$; $\frac{10}{15}$ e $\frac{12}{15}$ 6) $\frac{6}{12}$; $\frac{8}{12}$ e $\frac{10}{12}$

Vimos então em parágrafos anteriores que quando temos que reduzir duas ou mais frações irredutíveis ao mesmo denominador podemos escolher para denominador

das novas frações qualquer número que seja múltiplo comum dos denominadores das frações iniciais.

Se tivermos que reduzir as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ ao mesmo denominador, podemos, por exemplo, obter frações equivalentes a elas de denominador 48.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{36}{48}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 8}{6 \times 8} = \frac{40}{48}$$

Entretanto não há interêsse nenhum de nossa parte em estarmos trabalhando em aritmética com números muito grandes. É sempre melhor para nós trabalharmos com números que sejam os menores possíveis. Quando tivermos que reduzir frações irredutíveis ao mesmo denominador, devemos escolher para denominador das novas frações o menor número possível. Êsse número é o menor múltiplo comum dos denominadores das frações iniciais.

Seja ainda reduzir as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ ao mesmo denominador. Calculemos o menor múltiplo comum dos números 4 e 6.

$$\begin{array}{c|c} 4 - 6 & 2 \\ 2 - 3 & 2 \\ 1 - 3 & 3 \\ 1 - 1 & 1 \end{array} \qquad \text{m.m.c. } (4;6) = 12$$

Calculemos agora as frações equivalentes a $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ de denominador 12:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$$

EXERCÍCIOS

Utilizando o m.m.c., reduzir ao mesmo denominador as frações:

a) $\frac{6}{7}$; $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{14}$

b) $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{11}{15}$ e $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{8}$ e $\frac{11}{12}$

d) $\frac{7}{20}$; $\frac{11}{30}$ e $\frac{9}{10}$

RESPOSTAS: a) $\frac{24}{28}$; $\frac{21}{28}$ e $\frac{18}{28}$

b) $\frac{18}{30}$; $\frac{25}{30}$; $\frac{22}{30}$ e $\frac{10}{30}$

c) $\frac{18}{24}$; $\frac{12}{24}$; $\frac{21}{24}$ e $\frac{22}{24}$

d) $\frac{21}{60}$; $\frac{22}{60}$ e $\frac{54}{60}$

Definição: Frações heterogêneas são aquelas que têm denominadores diferentes.

Exemplos: $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{7}$

$\frac{1}{2}$; $\frac{8}{9}$ e $\frac{13}{17}$

Algumas operações com frações, bem como a colocação de frações em ordem crescente e decrescente já foram em parte vistas por nós. Já vimos como se soma, se subtrai e se coloca em ordem crescente e decrescente frações homogêneas (são as que têm o mesmo denominador). Suponhamos agora que queiramos fazer as mesmas operações com frações heterogêneas. Seja efetuar $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$. Da **maneira** que estas frações estão não é possível somá-las. Entretanto, podemos reduzi-las ao mesmo denominador.

Sabemos que m.m.c. (4; 6) = 12

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{2}{12}$$

Substituindo $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$ por suas frações equivalentes de denominador 12, teremos:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

Seja agora efetuar:

$$2\frac{1}{3} - 1\frac{5}{6} =$$

Como em qualquer operação ou comparação de frações que tivermos números mistos, temos inicialmente que reduzi-los a fração imprópria, vem:

$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \qquad 1\frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

$$2\frac{1}{3} - 1\frac{5}{6} = \frac{7}{3} - \frac{11}{6}$$

m.m.c. (3; 6) = 6

$$\frac{7}{3} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14}{6}$$

$$\frac{11}{6} = \frac{11 \times 1}{6 \times 1} = \frac{11}{6}$$

$$2\frac{1}{3} - 1\frac{5}{6} = \frac{7}{3} - \frac{11}{6} = \frac{14}{6} - \frac{11}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Colocar em ordem crescente $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{6}$.

m.m.c. (2; 4; 6) = 12

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \times 2}{6 \times 2} = \frac{2}{12}$$

A ordem crescente será então (comparando - se as frações equivalentes às iniciais, de denominador 12) $\frac{1}{6} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$.

Devemos lembrar ainda que se numa operação de frações tivermos números inteiros, por exemplo: $2 + \frac{3}{7}$, devemos escrever:

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{7} = \frac{14}{7} + \frac{3}{7} = \frac{17}{7} = 2\,\frac{3}{7}$$

EXERCÍCIOS

1) Quais são as frações equivalentes a $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$ de denominador 24?

2) Quais são as frações equivalentes a $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{6}$ e $\frac{11}{15}$ de denominador 60?

3) Quais são as frações equivalentes a $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{10}$ e $\frac{1}{2}$ de denominador 20?

4) Efetuar as operações: (utilizar o m.m.c.)

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$

b) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} =$

c) $\frac{4}{7} + \frac{1}{2} =$

d) $\frac{11}{15} + \frac{3}{5} =$

e) $\frac{17}{18} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3} =$

f) $\frac{4}{5} + \frac{13}{20} + \frac{7}{10} =$

g) $\frac{11}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} =$

h) $2 + 3\,\frac{1}{4} + \frac{5}{8} =$

i) $1 - \frac{7}{8} =$

j) $\frac{5}{7} - \frac{3}{14} =$

l) $2 - 1\,\frac{1}{4} =$

m) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} =$

n) $3 - 2\,\frac{3}{4} =$

o) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$

p) $1\,\frac{1}{2} - \frac{15}{16} =$

q) $4 - 2\,\frac{1}{3} =$

r) $4 + 1\,\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$

s) $7 - 5\,\frac{1}{2} =$

t) $5 + 2\,\frac{1}{3} + \frac{5}{6} =$

u) $3 - 1\,\frac{1}{5} =$

5) Escrever em ordem de grandeza crescente as frações $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ e $\frac{7}{8}$.

6) Escrever em ordem de grandeza decrescente as frações: $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{10}$ e $\frac{1}{2}$.

7) Escrever em ordem de grandeza crescente as frações: $\frac{11}{18}$; $\frac{5}{9}$ e $\frac{7}{12}$.

8) Escrever em ordem de grandeza decrescente as frações: $\frac{3}{5}$; $\frac{8}{15}$ e $\frac{7}{10}$.

RESPOSTAS: 1) $\frac{21}{24}$; $\frac{18}{24}$ e $\frac{12}{24}$.

2) $\frac{36}{60}$; $\frac{50}{60}$ e $\frac{44}{60}$.

3) $\frac{4}{20}$; $\frac{14}{20}$ e $\frac{10}{20}$.

4) a) $1\frac{1}{6}$ b) $1\frac{7}{12}$ c) $1\frac{1}{14}$ d) $1\frac{1}{3}$

e) $2\frac{1}{9}$ f) $2\frac{3}{20}$ g) $1\frac{9}{16}$ h) $5\frac{7}{8}$

i) $\frac{1}{8}$ j) $\frac{1}{2}$ l) $\frac{3}{4}$ m) $\frac{1}{2}$ n) $\frac{1}{4}$ o) $\frac{1}{4}$

p) $\frac{9}{16}$ q) $1\frac{2}{3}$ r) $6\frac{1}{4}$ s) $1\frac{1}{2}$

t) $8\frac{1}{6}$ u) $1\frac{4}{5}$.

5) $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{7}{8}$

6) $\frac{7}{10} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$

7) $\frac{5}{9} < 7\frac{7}{12} < \frac{11}{18}$

8) $\frac{7}{10} > \frac{3}{5} > \frac{8}{15}$

COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES QUE POSSUEM O MESMO NUMERADOR

Suponhamos que dadas as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ queiramos saber qual das duas é maior. Vamos então reduzi-las ao mesmo denominador.

m.m.c. (4; 5) = 20

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{5}{20}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \times 4}{5 \times 4} = \frac{4}{20}$$

Comparando-se as frações equivalentes a $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ de denominador 20, concluímos: $\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$.

Se quizermos agora comparar $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{10}$ teremos:

m.m.c. (5; 10) = 10

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{3 \times 1}{10 \times 1} = \frac{3}{10}$$

Concluímos então que $\frac{3}{5} > \frac{3}{10}$

Observando o que foi feito acima podemos gravar melhor a seguinte propriedade das frações:

Quando duas frações têm o mesmo numerador a maior é a que tem menor denominador.

EXERCÍCIOS

1) Colocar em ordem de grandeza crescente as frações: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{3}$.

2) Colocar em ordem de grandeza decrescente as frações: $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$.

3) Colocar em ordem de grandeza crescente as frações: $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{5}$.

4) Colocar em ordem de grandeza decrescente as frações: $\frac{6}{7}$; $\frac{6}{17}$; $\frac{6}{11}$.

RESPOSTAS: 1) $\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ 2) $\frac{2}{3} > \frac{2}{7} > \frac{2}{9}$

3) $\frac{3}{8} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ 4) $\frac{6}{7} > \frac{6}{11} > \frac{6}{17}$

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Para se multiplicar duas ou mais frações multiplica-se os numeradores e os denominadores entre si. Exemplos:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

$$1\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$$

Podemos indicar uma multiplicação das seguintes maneiras:

Com o sinal " x " (lê-se vêzes).

Com as palavras "de" ou "dos".

Exemplo: $\frac{4}{9}$ de $\frac{1}{3}$ significa $\frac{4}{9} \times \frac{1}{3}$.

Com um ponto .

$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{11}$ significa $\frac{3}{7} \times \frac{4}{11}$

DIVISÃO DE FRAÇÕES

O inverso de uma fração é a fração escrita com o numerador no lugar do denominador, e o denominador no lugar do numerador.

Exemplo: O inverso de $\frac{5}{6}$ é $\frac{6}{5}$.

Para se dividir duas frações multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda.

Exemplos:

$$\frac{4}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

$$1\frac{2}{3} \div 2\frac{3}{4} = \frac{5}{3} \div \frac{11}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{11} = \frac{20}{33}$$

Podemos indicar uma divisão das seguintes maneiras:

Com o sinal " ÷ " (lê-se dividido por)

Com um traço ——

Exemplos: $\frac{9}{3}$ significa $9 \div 3$

$\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{6}}$ significa $\frac{3}{7} \div \frac{5}{6}$.

EXERCÍCIOS

Efetuar as operações:

a) $\frac{6}{7} \times \frac{9}{11} =$

b) $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4} =$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} =$

d) $\frac{5}{7} \div \frac{8}{9} =$

e) $\dfrac{\frac{11}{13}}{\frac{7}{9}} =$

f) $\dfrac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{2}} =$

g) $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} =$

h) $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{7}} =$

i) $1\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$

j) $\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{3} =$

l) $2\frac{3}{4} \times 3\frac{2}{5} =$

m) $\dfrac{\frac{6}{7}}{1\frac{2}{3}} =$

n) $6 \times 2\frac{4}{5} =$

o) $1\frac{1}{4} \div 3 =$

p) $1\frac{1}{2} \times 3 =$

q) $\dfrac{1\frac{1}{4}}{2} =$

RESPOSTAS: a) $\frac{54}{77}$ b) $\frac{15}{28}$ c) $\frac{8}{15}$ d) $\frac{45}{56}$
e) $1\frac{8}{91}$ f) $1\frac{7}{9}$ g) $\frac{9}{14}$ h) $\frac{14}{15}$
i) $1\frac{1}{3}$ j) $\frac{9}{28}$ l) $9\frac{7}{20}$ m) $\frac{18}{35}$
n) $16\frac{4}{5}$ o) $\frac{5}{12}$ p) $4\frac{1}{2}$ q) $\frac{5}{8}$

Numa multiplicação de frações, por exemplo:

$\frac{2}{9} \times \frac{6}{7}$ podemos efetuar simplificações do seguinte tipo:

$$\frac{2}{9 \div 3} \times \frac{6 \div 3}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$$

O que fizemos foi dividir o numerador de uma fração e o denominador de outra por um mesmo número, antes de efetuar a multiplicação.

Vejamos agora a aplicação do que foi dito acima nos seguintes exemplos:

a) $3\frac{1}{3} \times \frac{2}{15} = \frac{10}{3} \times \frac{2}{15} =$

$= \frac{10 \div 5}{3} \times \frac{2}{15 \div 5} =$

$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

b) $\frac{4}{7} \div 6 = \frac{4}{7} \div \frac{6}{1} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} =$

$= \frac{4 \div 2}{7} \times \frac{1}{6 \div 2} =$

$= \frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$

EXERCÍCIOS

Efetuar as operações:

a) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} =$

b) $\frac{5}{7} \times \frac{3}{10} =$

c) $\frac{2}{9} \div \frac{5}{6} =$

d) $\frac{3}{5} \div \frac{7}{10} =$

e) $\frac{2}{3} \times 9 =$

f) $5 \times \frac{3}{10} =$

g) $\frac{5}{6} \div \frac{2}{3} =$

h) $9 \div \frac{3}{4} =$

i) $\frac{3}{7} \times \frac{14}{15} \times \frac{1}{2} =$

j) $\frac{2}{5} \times 10 \times 1\frac{1}{2} =$

l) $2\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{5} \times \frac{1}{6} =$

m) $5 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times 3 =$

RESPOSTAS: a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{3}{14}$ c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{6}{7}$

e) 6 f) $1\frac{1}{2}$ g) $1\frac{1}{4}$ h) 12

i) $\frac{1}{5}$ j) 6 l) $\frac{1}{2}$ m) 2

FRAÇÕES DECIMAIS

São frações cujo denominador é potência de dez (10; 100; 1 000; 10 000; etc.).

Exemplos: $\frac{3}{10}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{39}{1\ 000}$

Entretanto, a maneira vista acima não é a maneira usual de se escrever as funções decimais. A maneira mais comum de se escrever as frações decimais é a seguinte: 0,3; 0,07; 0,039.

TRANSFORMAÇÃO DE FRAÇÃO ORDINÁRIA EM DECIMAL E DECIMAL EM ORDINÁRIA

Como já foi visto em capítulo anterior a fração ordinária pode ser interpretada como uma divisão. Por exemplo a fração $\frac{1}{4}$ significa 1 dividido por 4. Para transformar uma fração ordinária em decimal basta que se aplique o que foi dito acima.

Seja transformar em fração decimal a fração ordinária $\frac{2}{5}$.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \hline 0 & 0{,}4 \end{array} \qquad \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Vejamos agora a transformação de fração decimal em fração ordinária. Seja transformar em fração ordinária a fração decimal 0,5.

O numerador da fração ordinária será a fração decimal sem a vírgula. O numerador será o número 1, acrescido de tantos zeros quantas forem as casas decimais da fração decimal.

$$0{,}5 = \frac{05}{10} = \frac{1}{2}$$

EXERCÍCIOS

1) Transformar em fração decimal as seguintes frações ordinárias:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{4}{5}$ g) $\frac{1}{8}$ h) $\frac{7}{8}$

2) Transformar em fração ordinária as seguintes frações decimais:

a) 0,7 b) 0,13 c) 0,6 d) 0,15

e) 0,25 f) 0,04 g) 0,01 h) 0,08

RESPOSTAS: 1) a) 0,5 b) 0,75 c) 0,6 d) 0,2

e) 0,25 f) 0,8 g) 0,125 h) 0,875

2) a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{13}{100}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{3}{20}$

e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{25}$ g) $\frac{1}{100}$ h) $\frac{2}{25}$

Se entretanto quizermos transformar a fração ordinária $\frac{1}{3}$ em fração decimal, teremos:

$$\frac{1}{3} = \begin{array}{l|l} 10 & 3 \\ \;10 & 0{,}33333... \\ \;\;10 & \\ \;\;\;10 & \\ \;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;1 & \end{array}$$

As reticências indicam que a divisão não pára aí.

E, por mais que continuássemos a divisão nunca obteríamos resto zero. Quando isto acontece, quando o resto da divisão nunca dá zero, por mais que continuemos esta divisão, a fração decimal obtida no cociente chama-se dízima periódica.

DÍZIMAS PERIÓDICAS

Seja transformar em fração decimal a fração ordinária $\frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}$ =

```
20        |_3_________
 20        0,66666...
  20
   20
    20
     2
```

No exemplo visto acima o número 6 vai se repetindo sempre. Poderíamos continuar a divisão e obter quantos números 6 quizéssemos. Êsse número que vai se repetindo sempre chama-se período da dízima periódica.

Seja agora transformar em fração decimal a fração ordinária $\frac{47}{90}$.

$\frac{47}{90}$ =

```
470       |_90_______
 200       0,5222...
  200
   200
    20
```

Temos agora um número (2) que se repete sempre, e um outro (5) que não se repete. O número que se repete sempre chama-se período e o que não se repete chama-se não período.

Dízima periódica simples é aquela em que depois da vírgula temos sòmente o período.

Dízima periódica composta é aquela em que depois da vírgula temos o período e o não período.

REPRESENTAÇÃO DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS

a) Repetindo-se várias vêzes o período (geralmente três vêzes) e colocando-se reticências.

b) Colocando-se um ponto sôbre o período.

c) Colocando-se um pequeno traço sôbre o período.

Seja a dízima periódica 0,7888...

A primeira maneira de representá-la é a vista acima. As outras seriam: $0,7\dot{8}$ ou $0,7\overline{8}$.

EXERCÍCIOS

Dadas as seguintes dízimas periódicas:

a) 0,777... b) 0,888... c) 0,171717...
d) 0,454545... e) 0,134134134...
f) 0,8777... g) 0,4555... h) 0,0444...
i) 0,565656... j) 0,67454545...

1º) Dizer se são simples ou compostas.
2º) Dizer qual é o período e o não período.

RESPOSTAS: Da a) à e): Dízimas periódicas simples.
a) período 7 b) período 8
c) período 17 d) período 45
e) período 134
Da f) à j): Dízimas periódicas compostas.
f) período 7, não período 8.
g) período 5, não período 4.
h) período 4, não período 0.
i) período 56, não período 0.
j) período 45, não período 67.

CÁLCULO DA FRAÇÃO GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA

Suponhamos que dada uma dízima periódica queiramos saber qual foi a fração que deu origem àquela

dízima. Essa fração que dá origem a dízimas periódicas chama-se fração geratriz.

a) Dízima periódica simples:

A fração ordinária que dá origem a uma dízima periódica simples é obtida da seguinte forma:

O numerador da fração ordinária será o período da dízima periódica. O denominador da fração ordinária será formado por tantos noves quantos forem os algarismos dêste período.

Seja calcular as frações geratrizes de:

a) 0,888...

$$0,888\ldots = \frac{8}{9}$$

b) 0,171717...

$$0,171717\ldots = \frac{17}{99}$$

b) Dízima periódica composta:

Coloca-se no numerador da fração ordinária o não período acompanhado do período e do número obtido subtrai-se o não período. No denominador coloca-se tantos noves quantos forem os algarismos do período, acompanhados de tantos zeros quantos forem os algarismos do não período.

Seja calcular as frações geratrizes de:

a) 0,7888...

$$0{,}7888\ldots = \frac{78-7}{90} = \frac{71}{90}$$

b) 0,0777... =

$$0{,}0777\ldots = \frac{07-0}{90} = \frac{7}{90}$$

EXERCÍCIOS

Calcular as frações geratrizes das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,444...
b) 0,161616...
c) 0,3888...
d) 0,5666...
e) 0,0444...
f) 0,2373737...
g) 0,0272727...
h) 0,3444...

RESPOSTAS: a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{16}{99}$ c) $\frac{7}{18}$ d) $\frac{17}{30}$
e) $\frac{2}{45}$ f) $\frac{47}{198}$ g) $\frac{3}{110}$ h) $\frac{31}{90}$

OPERAÇÕES CONTENDO FRAÇÃO DECIMAL E FRAÇÃO ORDINÁRIA

Uma regra que pode ser aplicada em todos os casos é a seguinte:

Reduz-se tudo a fração ordinária para depois se efetuar as operações.

Seja, por exemplo:

$$0{,}5 + \frac{1}{3} =$$

$$0{,}5 = \frac{05}{10} = \frac{1}{2}$$

Teremos então:

$$0{,}5 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

EXERCÍCIOS

Efetuar as operações:

a) $0{,}7 + \frac{1}{5} =$
b) $\frac{1}{2} - 0{,}3 =$
c) $0{,}333\ldots \times \frac{3}{4} =$
d) $\frac{1}{4} \div 0{,}444\ldots =$
e) $\frac{1}{3} + 0{,}666\ldots =$
f) $\frac{2}{5} - 0{,}1 =$

g) $\frac{3}{4} \times 0,\overline{36} =$ h) $0,888... \div \frac{8}{9} =$

i) $0,555... + \frac{1}{3} =$ j) $\frac{7}{10} - 0,4 =$

l) $0,3 \times \frac{5}{9} =$ m) $2 \div 0,\dot{4} =$

n) $0,777... + \frac{2}{3} =$ o) $\frac{3}{4} - 0,2 =$

p) $0,\dot{4} \times \frac{5}{7} =$ q) $\frac{5}{6} - 0,3\dot{6} =$

r) $0,2666... + \frac{11}{15}$ s) $0,2999... - \frac{1}{10} =$

t) $\frac{1}{2} \times 0,\dot{2} =$ u) $\frac{7}{9} \div 0,777... =$

RESPOSTAS: a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{9}{16}$

e) 1 f) $\frac{3}{10}$ g) $\frac{3}{11}$ h) 1

i) $\frac{8}{9}$ j) $\frac{3}{10}$ l) $\frac{1}{6}$ m) $4\frac{1}{2}$

n) $1\frac{4}{9}$ o) $\frac{11}{20}$ p) $\frac{2}{7}$ q) $\frac{7}{15}$

r) 1 s) $\frac{1}{5}$ t) $\frac{1}{9}$ u) 1

COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS E DECIMAIS

Devemos reduzir tudo a fração ordinária para depois comparar. Seja colocar em ordem de grandeza crescente as frações: $0,4$; $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$:

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{2} = \frac{12}{30};\ \frac{20}{30};\ \frac{15}{30}$$

Concluímos então: $0,4 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

EXERCÍCIOS

1) Colocar em ordem de grandeza crescente as frações:

a) $0,2;\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2};\ 0,7;\ \frac{1}{4}$

2) Colocar em ordem de grandeza decrescente as frações:

a) $0,6;\ \frac{2}{3};\ 0,4$ b) $0,3;\ \frac{1}{5};\ 0,9$

RESPOSTAS: 1) a) $\frac{1}{6} < 0,2 < \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 0,7$

2) a) $\frac{2}{3} > 0,6 > 0,4$ b) $0,9 > 0,3 > \frac{1}{5}$

Existem ainda questões envolvendo frações que não têm uma maneira geral de serem resolvidas. É preciso que o leitor recorra ao próprio raciocínio e aos conhecimentos adquiridos. Em alguns casos a representação gráfica auxilia muito. Noutros casos devemos fazer analogia com alguma operação conhecida.

Exemplo:

Que alteração sofre o valor de uma fração, quando se multiplica o numerador desta fração por 5?

Seja, por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$. Vamos multiplicar o seu numerador por 5 e o seu denominador por 1 (o que não altera o denominador):

$$\frac{1 \times 5}{2 \times 1} = \frac{5}{2}$$

O que foi feito é a mesma coisa que multiplicar a fração $\frac{1}{2}$ por $\frac{5}{1}$:

Façamos agora a mesma coisa com a fração $\frac{2}{3}$.

$$\frac{2 \times 5}{3 \times 1} = \frac{10}{3}$$

O que foi feito é a mesma coisa que multiplicar a fração $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{1}$.

Podemos então concluir que quando se multiplica o numerador de uma fração por 5, a fração fica multiplicada por 5.

Entretanto, o que foi feito acima não pode ser considerado regra para a resolução de exercícios dêste tipo. Demos sòmente um exemplo para mostrar ao leitor de que maneira se deve raciocinar neste caso.

Uma regra que nos auxilia em alguns casos é a seguinte:

Quando se altera o numerador, a fração sofre a mesma alteração que êste. Quando se altera o denominador, a fração sofre uma alteração que é exatamente o contrário do que foi feito com o denominador.

Exemplos:

Quando se aumenta o valor do numerador, o valor da fração aumenta.

Quando se aumenta o valor do denominador, o valor da fração diminui.

A regra enunciada acima só funciona quando a fração sofre uma única alteração e esta alteração é uma multiplicação, uma divisão, um aumento ou uma diminuição do numerador ou do denominador.

EXERCÍCIOS

Que alteração sofre o valor de uma fração:

a) Quando se multiplica o seu numerador por 2?

b) Quando se divide o seu numerador por 3?

c) Quando se multiplica o seu denominador por 5?

d) Quando se divide o seu denominador por 3?

e) Quando se diminui o seu numerador?

f) Quando se diminui o seu denominador?

g) Quando se multiplica o seu numerador por 2 e o denominador por 3?

h) Quando se divide o seu numerador por 3 e o denominador por 2?

RESPOSTAS:

a) Fica multiplicado por 2.
b) Fica dividido por 3.
c) Fica dividido por 5.
d) Fica multiplicado por 3.
e) Diminui.
f) Aumenta.
g) Fica multiplicado por $\frac{2}{3}$. (Dividido por $\frac{3}{2}$)
h) Fica multiplicado por $\frac{2}{3}$. (Dividido por $\frac{3}{2}$)

EXPRESSÕES ARITMÉTICAS

Para melhor aprendizado dividiremos o estudo da resolução das expressões aritméticas em diversos casos.

A) Expressões contendo adições e subtrações

Seja a expressão:

$$15 - 6 + 43 - 29 =$$

Neste caso não existe preferência, ou seja, faz-se primeiro a operação que estiver em primeiro lugar. Não se deve pensar, por exemplo, em fazer primeiro tôdas as adições, para depois se fazer tôdas as subtrações.

Iniciemos a resolução da expressão acima.

$$15 - 6 = 9$$

No lugar de 15 - 6, escreve-se 9. Teremos então:

$$9 + 43 - 29 =$$

Aplica-se novamente a regra, ou seja, faz-se primeiro o que aparece primeiro.

$$9 + 43 = 52$$

Escrevendo-se 52 no lugar de 9 + 43, teremos:

$$52 - 29 = 23$$

Seja agora resolver a expressão:

$$6 + 8 - 13 + 37 - 16 - 8 =$$
$$= 14 - 13 + 37 - 16 - 8 =$$
$$= 1 + 37 - 16 - 8 =$$
$$= 38 - 16 - 8 =$$
$$= 22 - 8 =$$
$$= 14$$

A regra enunciada acima vale também para as expressões fracionárias.

EXERCÍCIOS

Resolver as seguintes expressões:

a) $4 - 2 + 3 =$
b) $5 - 4 + 6 - 2 =$
c) $7 + 6 - 12 + 9 =$
d) $12 + 3 - 13 + 4 - 1 =$
e) $16 - 7 + 18 - 19 + 1 =$
f) $14 + 13 - 22 + 4 - 6 =$

g) $2 + 17 - 18 + 4 - 5 =$
h) $8 - 2 - 3 + 9 - 5 - 1 =$
i) $0,5 - 0,3 + 0,08 - 0,27 =$
j) $0,32 + 0,48 - 0,7 - 0,05 =$
l) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{11}{12} =$
m) $\frac{1}{4} + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} =$
n) $\frac{5}{6} - \frac{5}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$
o) $\frac{1}{7} + \frac{3}{14} - \frac{1}{4} - \frac{3}{28} =$

RESPOSTAS: a) 5 b) 5 c) 10 d) 5 e) 9
f) 3 g) 0 h) 6 i) 0,01
j) 0,05 l) $1\frac{1}{2}$ m) $\frac{3}{8}$ n) $\frac{7}{12}$
o) 0.

B) Expressões contendo adições, subtrações e multiplicações.

Neste caso faz-se primeiro tôdas as multiplicações que aparecem, para em seguida se efetuar as adições e subtrações de acôrdo com o caso A.

Seja resolver a expressão:

$$5 + 6 \times 2 - 8 + 3 \times 6 =$$

Façamos primeiro tôdas as multiplicações que aparecem.

$$6 \times 2 = 12.$$

A expressão fica então:

$$5 + 12 - 8 + 3 \times 6 =$$

$$3 \times 6 = 18.$$

A expressão fica então:

$$5 + 12 - 8 + 18 =$$

Que é resolvida agora de acôrdo com as regras enunciadas no caso A.

$$5 + 12 - 8 + 18 =$$

$$= 17 - 8 + 18 =$$

$$= 9 + 18 =$$

$$= 27$$

EXERCÍCIOS

Resolver as expressões:

a) $17 - 5 \times 3 =$

b) $29 - 7 \times 4 =$

c) $42 - 5 \times 8 + 7 =$

d) $17 - 4 \times 4 + 2 \times 3 =$

e) $2 \times 12 - 2 \times 4 + 5 \times 3 =$

f) $16 - 5 \times 3 + 17 - 9 \times 2 =$

g) $2 \times 14 - 3 \times 4 + 2 + 4 \times 5 =$

h) $17 - 8 \times 2 + 5 \times 3 - 4 \times 4 =$

i) $0,7 + 0,5 \times 1,2 - 0,4 \times 2,5 =$

j) $0,3 \times 1,4 - 0,1 \times 4,1 - 0,01 =$

l) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{8} =$

m) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{8} =$

n) $\frac{4}{5} - \frac{3}{7} \times \frac{7}{9} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{15} + \frac{3}{5} =$

o) $\frac{6}{7} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{14} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{7} - \frac{9}{28} =$

RESPOSTAS: a) 2 b) 1 c) 9 d) 7 e) 31
f) 0 g) 38 h) 0 i) 0,3 j) 0
l) $\frac{3}{16}$ m) 0 n) $1\frac{2}{45}$ o) 0

C) Expressões contendo as quatro operações.

ORDEM:

Primeiro faz-se as multiplicações e as divisões.

Depois faz-se as somas e subtrações.

Seja a expressão:

$8 + 16 \div 4 - 5 + 4 \times 3 - 9 =$

Resolvamos inicialmente as multiplicações e as divisões:

$16 \div 4 = 4$

$4 \times 3 = 12$

Teremos então:

$8 + 16 \div 4 - 5 + 4 \times 3 - 9 =$

$= 8 + 4 - 5 + 4 \times 3 - 9 =$

$= 8 + 4 - 5 + 12 - 9 =$

Como a expressão tem agora sòmente adições e subtrações, podemos resolvê-la de acôrdo com as regras enunciadas no ítem A.

$8 + 4 - 5 + 12 - 9 =$

$= 12 - 5 + 12 - 9 =$

$= 7 + 12 - 9 =$

$= 19 - 9 = 10$

É importante lembrar também que se tivermos, em seguida:

Uma multiplicação e uma divisão

Uma divisão e uma multiplicação

Duas divisões

O mais aconselhável é que se empregue a seguinte regra:

Fazer primeiro a operação que estiver em primeiro lugar.

Seja resolver as expressões:

a) $18 \div 6 \times 3 - 7 =$

$= 3 \times 3 - 7 =$

$= 9 - 7 = 2$

b) $4 \times 5 \div 10 + 3 =$

$= 20 \div 10 + 3 =$

$= 2 + 3 = 5$

Existe uma regra que manda que sejam feitas inicialmente tôdas as divisões para que depois sejam feitas as multiplicações. Entretanto, se fizermos inicialmente tôdas as divisoes, poderão, em alguns ca-

sos, aparecer números decimais. Devido a isto não achamos aconselhável o emprêgo desta regra.

EXERCÍCIOS

Resolver as seguintes expressões:

a) $13 - 5 \times 2 + 18 \div 9 =$

b) $21 - 4 \times 5 + 6 \div 2 - 1 =$

c) $11 + 3 \times 4 - 30 \div 3 - 13 =$

d) $16 \div 4 \times 2 + 3 \times 3 - 5 \times 3 =$

e) $3 + 30 \div 2 \times 3 - 18 \div 6 \div 3 - 37 =$

f) $20 \div 10 \div 2 + 4 \times 3 \div 6 - 1 =$

g) $32 \div 8 + 43 - 9 \times 5 - 2 =$

h) $9 - 12 \times 3 \div 18 + 4 \times 3 - 10 =$

i) $0{,}04 \div 0{,}2 + 0{,}5 - 6{,}7 \times 0{,}1 =$

j) $2 \div 0{,}04 - 49 + 0{,}3 \times 5 - 2{,}4 =$

l) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \div \frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$

m) $\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} =$

n) $2 - 1\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 1\frac{1}{4} - 1\frac{3}{8} =$

o) $3 - 2 \times 1\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \div \frac{1}{15} - 2 \times \frac{3}{4} - 1\frac{1}{15} =$

RESPOSTAS: a) 5 b) 3 c) 0 d) 2 e) 10

f) 2 g) 0 h) 9 i) 0,03 j) 0,1

l) $\frac{1}{12}$ m) $\frac{9}{10}$ n) $\frac{3}{8}$ o) $\frac{14}{15}$

Daqui para a frente sempre que nos referirmos a expressões estaremos nos referindo às que contêm as quatro operações.

D) Expressões aritméticas contendo parêntesis.

Pelo menos no início do estudo dêste tipo de expressão é muito importante que as seguintes regras sejam obedecidas na íntegra.

a) Resolve-se inicialmente tudo o que está dentro dos parêntesis.

b) Dentro dos parêntesis obedecemos às regras enunciadas nos ítens A); B); C).

c) Os parêntesis só são eliminados quando dentro dêles houver um único número.

d) Enquanto houver algum parêntesi na expressão não se efetua nada do que esteja fora dêle.

Seja resolver a expressão:

$43 - 2 \times (17 - 5 \times 3) - 18 \times 2 =$

$= 43 - 2 \times (17 - 15) - 18 \times 2 =$

Na expressão acima os parêntesis foram conservados, porque haviam 2 números dentro dêle (haviam ainda dentro dos parêntesis os números 17 e 15).

$17 - 15 = 2$

Se escrevêssemos a expressão da seguinte maneira:

$43 - 2 \times (2) - 18 \times 2 =$

Estaríamos escrevendo coisas a mais que o necessário. Dentro dos parêntesis restou um único número, o que nos permite eliminá-los.

Deveríamos ter escrito então:

$43 - 2 \times 2 - 18 \times 2 =$

E, agora podemos resolver a expressão obtida, de acôrdo com as regras enunciadas nos ítens A); B); C):

$43 - 2 \times 2 - 18 \times 2 =$

$= 43 - 4 - 18 \times 2 =$

$= 43 - 4 - 36 =$

$= 39 - 36 = 3$

EXERCÍCIOS

Resolver as expressões:

a) $3 \times (14 - 4 \times 3) =$

b) $5 + 2 \times (17 - 5 \times 3) =$

c) $13 - 4 \times (23 - 5 \times 4) + 2 =$

d) $2 \times 7 - (12 \div 6 + 3 \times 2) - 5 =$

e) $2 \times 4 - (19 + 18 \div 3 - 6 \times 4) + 1 =$

f) $3 \times (120 - 500 \div 5) - 2 \times (12 + 6 \times 3) =$

g) $4 - 3 \times (11 - 5 \times 2) + (27 \div 9 + 2 \times 2) -$
$- 16 \div 4 =$

h) $5 - 2 \times (3 \times 4 - 20 \div 2) + 3 \times (6 \times 5 -$
$- 51 \div 3) - 5 \times 8 =$

i) $0,2 - 5 \times (0,47 - 0,23 \times 2) + 0,1 =$

j) $1,3 \times (0,4 \div 0,02 - 0,18 \div 0,01) - 2,5 =$

l) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times (3 - 4\,\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) =$

m) $2 - \frac{1}{2} \div (5 - 0,25 \div \frac{1}{16} - 2 \times 0,25) =$

n) $4 \times (\frac{1}{5} \times 1\,\frac{1}{4} + \frac{1}{2} : 0,\dot{6}) - \frac{1}{3} \div \frac{1}{9} =$

o) $6 \times (12 - 3 - 0,5 \div \frac{1}{4} - \frac{5}{6}) + \frac{1}{4} \times 2 =$

RESPOSTAS: a) 6 b) 9 c) 3 d) 1 e) 8

f) 0   g) 4   h) 0   i) 0,25

j) 0,1   l) $\frac{1}{4}$ m) 1   n) 1   o) $37\frac{1}{2}$

E) Expressões contendo parêntesis e colchetes

Devemos fazer inicialmente o que está dentro dos parêntesis, obedecendo às regras enunciadas no ítem D). Quando os parêntesis são eliminados, começa-se a resolver o que está dentro dos colchetes, obedecendo-se as mesmas regras enunciadas no ítem D). (Para sabermos quais são as regras que devemos usar, basta que se troque nas regras enunciadas no ítem D, a palavra parêntesis pela palavra colchetes).

Seja resolver a expressão:

$$37 - 2 \times [49 - 3 \times (4 + 5 \times 2) + 1] =$$

Resolveremos inicialmente o que está dentro dos parêntesis. Teremos então:

$$37 - 2 \times [49 - 3 \times (4 + 5 \times 2) + 1] =$$

$$= 37 - 2 \times [49 - 3 \times (4 + 10) + 1] =$$

$$= 37 - 2 \times [49 - 3 \times 14 + 1] =$$

Como os parêntesis foram eliminados passamos agora a resolver o que está dentro dos colchetes, obedecendo sempre às regras já enunciadas.

Teremos então:

$$37 - 2 \times [49 - 3 \times 14 + 1] =$$

$$= 37 - 2 \times [49 - 42 + 1] =$$

$$= 37 - 2 \times [7 + 1] =$$

$$= 37 - 2 \times [8] =$$

Não havia agora necessidade que os colchetes fôssem escritos, pois dentro dêles há sòmente um número. Deveríamos ter escrito:

$$37 - 2 \times 8 =$$

Que se resolve agora de acôrdo com as regras enunciadas nos ítens A); B); C):

$$37 - 2 \times 8 =$$

$$= 37 - 16 = 21$$

EXERCÍCIOS

Resolver as expressões:

a) $11 - [17 - 2 \times (45 - 5 \times 8)] =$

b) $26 - [21 - 5 \times (7 \times 4 - 100 \div 4) + 14] =$

c) $18 - [42 - 8 \times (20 - 60 \div 4) + 12 \div 6] =$

d) $27 - 2 \times [49 - 6 \times (11 - 27 \div 9) + (3 + 4 \times 2)] =$

e) $2 \times [71 - 7 \times (20 - 60 \div 6) + 13 - 6 \times (11 - 4 \times 2 - 1)] =$

f) $17 - 5 \times [14 - (3 + 4 \times 2)] + [13 - (20 - 4 \times 2)] =$

g) $19 - 3 \times [15 - 4 \times (143 - 70 \times 2) + 1] - 1 =$

h) $27 - 2 \times [2 + 3 \times (123 - 11 \times 11) - 1] - 18 \div 6 =$

i) $12 \times 2 - [27 - 5 \times (7 \times 3 - 100 \div 5) + 1] + 9 - 16 \div 4 =$

j) $29 - 5 \times [35 - 17 \times (12 \times 2 \div 8 - 1) + 20 \div 5] + 2 \times 3 - 7 =$

l) $0{,}4 - 3 \times [1{,}2 - 0{,}22 \div (2{,}6 - 1{,}2 \times 2) - 0{,}05] - 0{,}2 \times 0{,}4 =$

m) $0{,}6 + 12 \div [2{,}4 + 3 \times (1{,}2 \div 0{,}06 - 18) - 11 \times 0{,}4] - 1{,}2 \times 3 =$

n) $\frac{1}{2} + 0{,}\dot{3} \div [2 - 0{,}2 \times (\frac{5}{6} + \frac{1}{3} \div \frac{1}{2} + \frac{1}{6})] + 1\frac{1}{4} \div 5 =$

o) $2 - 0{,}5 \div [3 - 1\frac{1}{5} \times (\frac{1}{2} \times 0{,}\dot{6} + 2\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}) - \frac{2}{5}] =$

RESPOSTAS: a) 4 b) 6 c) 14 d) 3 e) 4 f) 3 g) 6 h) 10 i) 6 j) 3 l) 0,17 m) 0 n) $\frac{19}{20}$ o) $\frac{3}{4}$

F) Expressões aritméticas contendo parêntesis, colchetes e chaves.

Para a resolução destas expressões basta que se conheça bem tudo o que foi visto até aqui. Não apresenta êste tipo de expressão pràticamente, novidade alguma. Temos sòmente que obedecer à seguinte ordem:

1º) O que está dentro dos parêntesis.
2º) O que está dentro dos colchetes.
3º) O que está dentro das chaves.

Devemos lembrar ainda que enquanto houver parêntesis não se faz nada do que esteja fora dêle. A mesma coisa se pode dizer em relação aos colchetes e às chaves.

Seja resolver a expressão:

$21 - \{2 + 2 \times [30 - (27 - 4 \times 2)] - 1\} =$

Vamos resolver inicialmente o que está dentro dos parêntesis e dos colchetes, obedecendo a regras já vistas.

$21 - \{2 + 2 \times [30 - (27 - 4 \times 2)] - 10\} =$

$= 21 - \{2 + 2 \times [30 - (27 - 8)] - 10\} =$

$= 21 - \{2 + 2 \times [30 - 19] - 10\} =$

$= 21 - \{2 + 2 \times 11 - 10\} =$

Uma vez eliminados os parêntesis e colchetes vamos proceder à eliminação das chaves, da mesma forma que os parêntesis e colchetes foram eliminados:

$= 21 - \{2 + 22 - 10\} =$

$= 21 - \{24 - 10\} =$

$= 21 - 4 = 7$

EXERCÍCIOS

Resolver as expressões:

a) $4 + \{12 - [22 - (6 \times 5 - 10)]\} =$

b) $30 - \{13 - [5 - (31 - 6 \times 5)]\} =$

c) $10 - 2 \times \{7 - 4 \div [18 \div (36 - 3 \times 10) - 1]\} =$

d) $2 \times \{29 - 9 \times [11 - (20 \div 4 + 2 \times 2) + 1] + 2\} =$

e) $2 + 4 \times \{8 - 2 \times [9 \div (13 - 5 \times 2)]\} =$

f) $2 \times 8 - \{2 \times 3 - [5 - 24 \div (22 \div 11 + 120 \div 30)] + 2\} =$

g) $0,4 - \{0,2 + 0,5 \times [1,2 - 3 \times (2,3 - 0,5 \times 4) - 0,1]\} - 0,1 =$

h) $\frac{1}{3} \div \{2 + 3 \times (\frac{1}{5} \div (3 - \frac{1}{4} \div \frac{1}{8}) + \frac{3}{10}) - \frac{1}{2}\} \div \frac{1}{9} =$

RESPOSTAS: a) 14 b) 21 c) 0 d) 8 e) 10 f) 9 g) 0 h) 1

POTÊNCIA

É um produto de fatôres iguais.

Seja o produto $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$

Dizemos que êste produto é uma potência de 2, ou mais precisamente, 2 elevado à quinta potência. Escreve-se 2^5, onde o número 2 é chamado base e o número 5 é chamado expoente.

A base da potência indica qual é o número que vai ser multiplicado por si mesmo. O expoente indica quantas vêzes êsse número aparece na multiplicação.

Exemplos:

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$7 \times 7 \times 7 = 7^3$

Se tivermos uma expressão qualquer elevada a uma potência, devemos inicialmente resolver a expressão para depois elevá-la à potência.

Seja, por exemplo:

$$(21 - 6 \times 3)^2 = (21 - 18)^2 = 3^2 = 3 \times 3 = 9$$

POTÊNCIA DE FRAÇÕES

Seja, por exemplo: $(\frac{1}{2})^2$

Teremos:

$$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Quando se quer elevar uma fração ordinária a uma potência, eleva-se o numerador e o denominador da fração e esta potência.

Seja agora elevar $(0,02)^3$

Uma das maneiras de se fazer isto seria:

$$(0,02)^3 = 0,02 \times 0,02 \times 0,02 = 0,000\ 008$$

Existe, entretanto, uma regra que pode ou não ser usada, dependendo da opinião do leitor. É-nos permitido escolher o que julgarmos mais fácil. Seja a mesma potência $(0,02)^3$.

Eleva-se a parte significativa da base ao ex-

poente da potência.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

Multiplica-se o número de casas decimais da base pelo expoente da potência.

Número de casas decimais da base = 2.

Expoente da potência = 3.

$2 \times 3 = 6$ (número de casas decimais do resultado)

O resultado será então o número 8, escrito com 6 casas decimais:

$$(0,02)^3 = 0,000\ 008$$

Todo número elevado à unidade é igual a si mesmo.

Exemplo: $7^1 = 7$ $5^1 = 5$

Qualquer número (diferente de zero), elevado ao expoente zero é igual a 1.

Exemplo: $2^0 = 1$ $(0,6)^0 = 1$

$17^0 = 1$ $(\frac{3}{4})^0 = 1$

EXERCÍCIOS

Resolver:

a) $6^2 =$

b) $4^3 =$

c) $(37 - 17 \times 2)^3 =$

d) $(42 - 8 \times 5)^4 =$

e) $(22 \div 11 + 30 \div 10)^2 =$

f) $(\frac{3}{4})^2 =$

g) $(\frac{4}{5})^3 =$

h) $(\frac{1}{2})^4 =$

i) $(1\ \frac{1}{3})^2 =$

j) $(2\ \frac{1}{4})^2 =$

l) $(1\ \frac{1}{2})^3 =$

m) $(0{,}01)^3 =$

n) $(0{,}7)^2 =$

o) $(0{,}12)^2 =$

p) $(0{,}3)^3 =$

q) $(0{,}2)^4 =$

RESPOSTAS: a) 36 b) 64 c) 27 d) 16 e) 16 f) $\frac{9}{16}$ g) $\frac{64}{125}$ h) $\frac{1}{16}$ i) $1\ \frac{7}{9}$ j) $5\frac{1}{16}$ l) $3\ \frac{3}{8}$ m) 0,000 001 n) 0,49 o) 0,0144 p) 0,027 q) 0,0016

G) Expressões aritméticas contendo potências.

Ordem:

1º As potências

2º As multiplicações e divisões

3º As somas e subtrações

Seja resolver a expressão:

$$18 - 2^3 \times (17 + 3^3 \div 9 - 3^2 \times 2) + 1^3 =$$

Resolve-se primeiro tôdas as potências:

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

A expressão inicial fica então como segue:

$$18 - 8 \times (17 + 27 \div 9 - 9 \times 2) + 1 =$$

Que pode agora ser resolvida de acôrdo com o que vimos anteriormente.

$18 - 8 \times (17 + 27 \div 9 - 9 \times 2) + 1 =$

$= 18 - 8 \times (17 + 3 - 9 \times 2) + 1 =$

$= 18 - 8 \times (17 + 3 - 18) + 1 =$

$= 18 - 8 \times (20 - 18) + 1 =$

$= 18 - 8 \times 2 + 1 =$

$= 18 - 16 + 1 = 2 + 1 = 3$

Se entretanto tivermos uma expressão elevada a uma potência, como no seguinte exemplo:

$14 - 2 \times (32 - 6 \times 5)^2$

Devemos inicialmente resolver a expressão que está elevada à potência:

$(32 - 6 \times 5)^2 = (32 - 30)^2 = 2^2$

E a expressão inicial fica como segue:

$14 - 2 \times 2^2 =$

$= 14 - 2 \times 4 =$

$= 14 - 8 = 6$

EXERCÍCIOS

Resolver as expressões:

a) $2^4 \div 8 + 2^2 \times 3 - 13 =$

b) $3^2 \times 2 - 4^2 \div 2 - 3^2 =$

c) $(2^3 - 3^4 \div 27 - 1) \div 2 \times 2^5 \div 8 =$

d) $(3^3 - 4^2 \div 8 - 2^2 \times 3) \times (15 - 20 \div 2^2 - 2^3) =$

e) $3 \times (2^4 - 15 \div 3 - 2^3) + 10 - 4^2 =$

f) $2 \times (32 \div 8 - 2)^2 + 3 =$

g) $(9 - 5)^2 - 15 + (16 - 3 \times 3)^2 - 47 =$

h) $(3 + 2^4 \div 8)^2 - (6 \times 2^3 - 11 \times 2^2 + 1)^2 =$

i) $47 - (23 - 10 \times 2)^3 - 4^2 =$

j) $12 - [18 - (19 - 5 \times 3)^2]^2 + (2^4 \div 8 + 1)^3 - 5 \times 7 =$

l) $(0,3)^3 \div 0,0027 - 9 =$

m) $(0,2)^2 - [0,3 \times (0,2)^2 - 0,011] \times 10 =$

n) $(\frac{1}{2})^3 \div (\frac{3}{4})^2 - (\frac{1}{3})^2 =$

o) $[(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{2})^3 \times (1\frac{1}{3})^2] \div \frac{1}{3} =$

RESPOSTAS: a) 1 b) 1 c) 8 d) 26 e) 3 f) 11 g) 3 h) 0 i) 4 j) 0 l) 1 m) 0,03 n) $\frac{1}{9}$ o) 1

Devemos relembrar agora que, como já foi dito, a divisão pode ser indicada por um traço ——

Se quizermos representar $9 \div 3$ podemos escrever $\frac{9}{3}$.

Seja agora a expressão:

$$\frac{27 - 5 \times 5 + 4}{3 \times 4 - 20 \div 2} =$$

Resolve-se o que está acima e o que está embaixo do traço. No final divide-se os resultados obtidos. Teremos então:

$$\frac{27 - 5 \times 5 + 4}{3 \times 4 - 20 \div 2} =$$

$$= \frac{27 - 25 + 4}{12 - 20 \div 2} = \frac{2 + 4}{12 - 10} = \frac{6}{2} = 3$$

EXERCÍCIOS

Resolver as expressões:

a) $\dfrac{47 - 9 \times 5}{5 \times 6 - 29} =$

b) $\dfrac{33 - 6 \times 5 + 7}{25 - 5 \times 4} =$

c) $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} =$

d) $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \div 1\,\frac{1}{2}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{3} \times 2} =$

e) $\dfrac{\frac{1}{5} + (3 - \frac{1}{2} \times 3\,\frac{1}{3})}{(1\,\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \div 1\,\frac{1}{5}) - \frac{13}{30}} =$

f) $\dfrac{(\frac{1}{2} \times 0{,}333\ldots + \frac{1}{6}) \times 2}{0{,}5 + \frac{1}{4}} =$

g) $\dfrac{\frac{1}{3} - 0{,}222\ldots}{\frac{1}{3}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} =$

h) $\dfrac{\frac{1}{2} - [\frac{7}{8} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4})] + \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} \times [\frac{1}{2} - (\frac{2}{3} - 2\,\frac{1}{2} \div 5)]} =$

i) $\dfrac{1\frac{1}{3} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{2 - 1\,\frac{3}{4}} - (\frac{2}{3} + \frac{7}{15}) =$

j) $\dfrac{(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{4})^2}{(\frac{3}{4})^2} =$

l) $\dfrac{(\frac{1}{4} + \frac{7}{8}) - [(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) - \frac{5}{12}]}{2 - (1\,\frac{1}{6} + \frac{1}{2})} - (1\,\frac{1}{2} - \frac{3}{8}) =$

m) $\dfrac{(\frac{2}{3})^2 - \frac{2}{9}}{1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})} - (1 - \frac{1}{3}) \times (\frac{1}{2})^2 =$

n) $\dfrac{(2\,\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \times 3) - [\frac{2}{5} - \frac{1}{10} \times (\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} \div 5)]}{[(3 - \frac{2}{5} \div \frac{1}{5}) - 2\,\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}] - \frac{7}{15}} =$

o) $\dfrac{3 \times (3\,\frac{1}{3} - 2\frac{7}{9}) - [(\frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}) - \frac{1}{6}]}{4 - [1 + (\frac{1}{3})^2 + 1\,\frac{1}{3}]} - (1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}) \div 7 =$

p) $\dfrac{\frac{1}{9} \div 0{,}\dot{5}}{0{,}4 - \frac{1}{5}} \div \dfrac{0{,}222\ldots + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - 0{,}2 - \frac{2}{15}} =$

q) $\dfrac{0{,}1 \times 3\,\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times (0{,}2 \div \frac{1}{2} \times 2\,\frac{1}{2} + 0{,}\dot{7})}{0{,}555\ldots \times \frac{1}{5}} =$

r) $\dfrac{2\frac{1}{2} \times (\frac{1}{5} - 0,\dot{2} \times \frac{3}{4})}{0,25} \times$

$\times \dfrac{0,3 \div (0,5 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3})}{\frac{2}{5} \div 0,111\ldots} =$

s) $\dfrac{\frac{2}{3} - 0,181818\ldots}{2 - 0,5 \times 0,6} \div$

$\div \dfrac{0,2 \div \frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} + 0,777\ldots}{(3 - 0,2666\ldots \div \frac{1}{5}) - \frac{1}{2}} =$

RESPOSTAS: a) 2 b) 2 c) 1 d) 4 e) $2\frac{1}{11}$

f) $\frac{8}{9}$ g) $1\frac{5}{6}$ h) 2 i) $\frac{13}{15}$ j) $\frac{1}{3}$

l) 1 m) $\frac{1}{10}$ n) 1 o) $\frac{2}{21}$ p) $\frac{3}{5}$

q) 7 r) $\frac{1}{12}$ s) $\frac{21}{110}$

Datilografia e Desenhos de: Taniguchi
Impresso pela GRÁFICA EDITÔRA HAMBURG
Rua Vergueiro, 688 - Fone: 31-3512
SÃO PAULO - Capital